ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი ტეფნაძე

დოქტორანტის I სემინარი

„ფურიეს კოეფიციენტებისა და კერძო ჯამების ჰარდის ტიპის უტოლობები უოლშ-პალის სისტემის მიმართ“

ხელმძღვანელი
სრული პროფესორი:
უშანგი გოგინავა

თბილისი
2014 წ

სარჩევი

შესავალი

ჰარდის ტიპის კლასიკური უტოლობა ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|/k \le c\|f\|_{H_1}, \qquad f \in H_1.$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი, დაამტკიცეს ჰარდიმ და ლიტლვუდმა [6] (იხილეთ აგრეთვე [2]). უოლშის სისტემის მიმართ ანალოგიური უტოლობა დამტკიცებულია შიპის, ვეიდის, შიმონის და ფალის წიგნში [8]. ვეისმა [16] განაზოგადა ეს შედეგი და აჩვენა, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|^p / k^{2-p} \le c\|f\|_{H_p}^p, \qquad f \in H_p, \qquad (0 < p \le 2).$$

პალმა [7] დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი $f \in L_p$-თვის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{f}(2^k)\right|^2 < \infty, \qquad (1 < p < 2).$$

ეს თეორემა არ არის სამართლიანი $p=1$-თვის, მაგრამ ის შეიძლება დამტკიცდეს H_1 კლასის ფუნქციებისთვის (იხილეთ [2]).
შიმონმა და ვეისმა [11] დაამტკიცა, რომ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი რომ

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{(2-2/p)k}\left|\hat{f}(2^k)\right|^2\right)^{1/2} < c_p\|f\|_{H_p}, \qquad f \in H_p, \qquad (0 < p \le 1).$$

კარგადაა ცნობილი რომ უოლშის სისტემა არ ქმნის ბაზისს L_1-სივრცეში. მეტიც, არსებობს ფუნქცია H_1-ში, ისეთი რომ კერძო ჯამები არ იქნება შემოსაზღვრულები L_1 ნორმით.
შიმონმა [10] აჩვენა, რომ სამართლიანია შემდეგი ძლიერად შეჯამებადობის თეორემა:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\|S_k f - f\|_1 / k = 0,$$

სადაც $S_k f$ აღნიშნავს k-ურ უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამს. ანალოგიური თეორემა ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის დამტკიცებულია სმიტის [12] სტატიაში, ხოლო ვილინკინის სისტემისთვის გატის [3] შრომაში.
შიმონმა [9] დაამტკიცა, რომ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k f\|_p / k^{2-p} \le c_p\|f\|_{H_p}, \ (0 < p < 1).$$

ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები ორგანზომილებიანი უოლშ-ფურიეს კერძო ჯამებისათვის განიხილეს გოგოლაძემ [4], გოგინავამ [5], ვეისმა [17].

განმარტებები და აღნიშვნები

N_+ $-$ით ავღნიშნოთ მთელი დადებით რიცხვების სიმრავლე, ხოლო N $-$ით მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე $N := N_+ \cup \{0\}$. განვიხილოთ დისკრეტული ორობითი ჯგუფი $Z_2 := \{0,1\}$, mod(2) შეკრების ოპერაციი სმიმართ. Z_2-ზე გვაქვს ჰაარის ზომა, თითოეულ ელემენტის ზომა არის 1/2. G $-$თი ავღნიშნოთ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი

$$G = \prod_{k=0}^{\infty} Z_2 \ .$$

G -ს ელემენტები წარმოადგენს მიმდევრობებს $x = (x_i, i \in N)$, სადაც $x_i = 0,1$, ($i \in N$).
მოცემულ ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია განიმარტება, როგორც შესაბამისი კოორდინატების mod(2) ჯამი. ზომა (აღნიშნული μ-თი) და ტოპოლოგია არის შესაბამისად ზომებისა და ტოპოლოგიების პირდაპირი ნამრავლი. G -ს ეწოდება უოლშის ჯგუფი. G -ს ქვესიმრავლეებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$I_0 := G,$$

$$I_n(x) := I_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) := \{y \in G : y = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, ...)\} \ x \in G, n \in N \ .$$

ამ სიმრავლეებს ეწოდებათ ორობითი ინტერვალები.
აღვნიშნოთ $I_n := I_n(0)$ და $\overline{I_n} := G \setminus I_n$, $e_n = (0,...,0, x_n = 1,0,...) \in G$, ($n \in N$) .

ყოველი N -თვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, სადაც $n_i = 0,1$ და მხოლოდ n_i-ების სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან. თუ $|n| := \max\{ j \in N, n_j = 0\}$, მაშინ $2^{|n|} \le n < 2^{|n|+1}$.

ავღნიშნოთ N_{n_0} -ით ყველა კენტი რიცხვების სიმრავლე. მაშინ ყოველი $n \in N_{n_0}$ -თვის ადგილი აქვს წარმოდგენას $n = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} n_i 2^i$ და

(1)
$$\sum_{\{n : 2^k \le n \le 2^{k+1}\}} 1 = 2^{k-1} \ .$$

განვიხილოთ p ხარისხსით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე $L_p(G)$ ნორმით

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad (0 < p < +\infty).$$

$weak\text{-}L_p(G)$ სივრცე შეიცავს ზომად ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p} := \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mu(|f| > \lambda) \ < +\infty, \quad (0 < p < +\infty).$$

განვმარტოთ k -ური რადემახარის ფუნქცია:

$$r_k(x) := (-1)^{x_k}, \ (k \in N, \ x \in G).$$

შემდეგ განვსაზღვროთ უოლშის სისტემა, როგორც

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_k} = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \quad (n \in N).$$

უოლშის სისტემა ორთონორმირებულია და სრულია $L_2(G)$ (იხილეთ [1] და [13]).
განვიხილოთ კერძო ჯამები უოლშის სისტემის მიმართ

$$S_M(f) := \sum_{i=0}^{M-1} \hat{f}(i) w_i ,$$

სადაც $\hat{f}(i)$ წარმოადგენს f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს i-ურ კოეფიციენტს:

$$\hat{f}(i) := \int_G f(x) w_i(x) d\mu(x) .$$

ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$S_n(f(x)) = \int_G f(t) D_n(x+t) d\mu(t)$$

სადაც

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k , \quad (n \in N)$$

დირიხლეს გული ეწოდება.

როგორც ცნობილია [8]

(2) $$D_{2^n} = \begin{cases} 2^n, x \in I_n \\ 0, x \notin I_n \end{cases}$$

(3) $$D_n = w_n \sum_{j=0}^{\infty} r_j D_{2^j} .$$

$\sigma-$ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია 2^{-k} ზომის მქონე ორობითი ინტერვალებით I_k ავღნიშნოთ $F_k(k \in N)$-თი, (იხილეთ [14]).

ავღნიშნოთ $f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ -ით მარტინგალი $F_k(k \in N)$ ნაკადის მიმართ. f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^* = \sup_{n \in N} \left| f^{(n)} \right| .$$

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახითაც

$$f^* = \sup_{n \in N} \frac{1}{\mu(I_n(x))} \left| \int_{I_n(x)} f(u) d\mu(u) \right| .$$

ჰარდის მარტინგალების სივრცე $H_p(G)$ ($0 < p < \infty$) შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_{L_p} < \infty .$$

$f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ მარტინგალისათვის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები განიმარტება შემდეგი განსხვავებული გზით:

$$\hat{f}(i) := \lim_{k \to \infty} \int_G f^{(k)}(x) w_i(x) d\mu(x) .$$

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ $\left(S_{2^n}(f) : n \in N\right)$ არის მარტინგალი ამ ფუნქციის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები ემთხვევა $\left(S_{2^n}(f) : n \in N\right)$ მარტინგალის შესაბამის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტებს.

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება $p-$ატომი თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

(4) $$\begin{cases} a)\int_G a d\mu = 0, \\ b)\|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p}, \\ c)\sup p(a) \subset I. \end{cases}$$

ვეისმა $[15]$ $p-$ატომების საშუალებით მოგვცა $H_p(G)$ $(0<p\le 1)$ სივრცეების ახალი დახასიათება:

თეორემა W. ($Weisz$)მარტინგალი $f=\left(f^{(n)}, n\in N\right)$ ეკუთვნის $H_p(G)$ $(0<p\le 1)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ატომების მიმდევრობა $\left(a_k, k\in N\right)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $\left(\mu_k, k\in N\right)$ ისეთი, რომ ყოველი $n\in N$ -თვის

(5) $$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{2^n}(a_k) = f^{(n)}, \quad a.e.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p < \infty.$$

უფრო მეტიც

$$\|f\|_{H_p} \approx \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო წარმოდგენებს შორის, რომელთაც აქვთ (5)-ს სახე.

ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1. ვთქვათ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\infty$. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$, ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\hat{f}(k)\right|^{p}\phi_k}{k^{2-p}}=\infty,\ \left(0<p\le 2\right), \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_{2^k}\left|\hat{f}\left(2^k\right)\right|^{2}}{2^{(2/p-2)k}}=\infty,\ \left(0<p\le 1\right) \tag{7}$$

და

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|S_k f\right\|_{weak-L_p}^{p}\phi_k}{k^{2-p}}=\infty,\ \left(0<p<1\right). \tag{8}$$

შედეგი 1. ვთქვათ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\infty$. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$, ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|S_k f\right\|_{L_p}^{p}\phi_k}{k^{2-p}}=\infty,\quad \text{სადაც}\quad 0<p<1.$$

ძირითადი შედეგების დამტკიცება

ვთქვათ $0 < p \le 2$ და $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \infty$. მაშინ არსებობს არალებადი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა $\{\alpha_k \ge 2 : k \in N_+\}$ ისეთი, რომ

(9)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{p/4}} < \infty,$$

ვთქვათ

$$f^{(A)}(x) := \sum_{\{k:\alpha_k < A\}}\lambda_k a_k(x),$$

სადაც

$$\lambda_k = \frac{1}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}$$

და

$$a_k(x) = 2^{\alpha_k(1/p-1)}\left(D_{2^{\alpha_k+1}}(x) - D_{2^{\alpha_k}}(x)\right)$$

მას შემდეგ, რაც

$$S_{2^A}(a_k(x)) = \begin{cases} a_k(x), \alpha_k < A \\ 0, \alpha_k \ge A \end{cases}$$

$$\sup p(a_k) = I_{\alpha_k},$$

$$\int_{I_{\alpha_k}} a_k\, d\mu = 0,$$

$$\|a_k\|_{\infty} \le \mu(\sup p(a_k))^{-1/p},$$

თეორემა W-ს, (4)-ის (5)-ის და (9)-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $f \in H_p$.
ადვილი სანახავია, რომ

(10)
$$\hat{f}(i) = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}, \\ i \in \{2^{\alpha_k}, \dots, 2^{\alpha_k+1}-1\}, k = 1,2,\dots \\ 0, \\ i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{2^{\alpha_k}, \dots, 2^{\alpha_k+1}-1\}. \end{cases}$$

პირველად დავამტკიცოდ (6) უტოლობა. (1) და (10)-ის გაერთიანებით მივიღებთ

$$\sum_{l=1}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{\left|\hat{f}(l)\right|^p\phi_l}{l^{2-p}}\ge\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{\left|\hat{f}(l)\right|^p\phi_l}{l^{2-p}}$$

$$\ge\phi_{2^{\alpha_k}}\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{\left|\hat{f}(l)\right|^p}{l^{2-p}}\ge\frac{\phi_{2^{\alpha_k}}2^{\alpha_k(1-p)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{p/4}}\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{1}{l^{2-p}}$$

$$\ge\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/2}2^{\alpha_k(1-p)}\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{1}{2^{(\alpha_k+1)(2-p)}}$$

$$\ge\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/2}2^{\alpha_k(1-p)}\frac{1}{2^{(\alpha_k+1)(1-p)}}\ge\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/2}$$

$$\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty.$$

ვთქვათ $0<p\le 1$. ანალოგიურად (10)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{\phi_{2^l}\left|\hat{f}\left(2^l\right)\right|^2}{2^{(2/p-2)l}}\ge\frac{\phi_{2^k}\left|\hat{f}\left(2^k\right)\right|^2}{2^{(2/p-2)k}}\ge\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/2}\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty.$$

რაც ასრულებს (7) -ის დამტკიცებას.

ახლა დავამტკიცოთ (8). ვთქვათ $0<p<1$ და $2^{\alpha_k}\le j<2^{\alpha_k+1}$. (10)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$S_jf=\sum_{l=0}^{2^{\alpha_{k-1}+1}-1}\hat{f}(l)w_l+\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{j-1}\hat{f}(l)w_l$$

$$=\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{\alpha_\eta}}^{2^{\alpha_{\eta+1}+1}-1}\hat{f}(v)w_v+\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{j-1}\hat{f}(l)w_l$$

$$=\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{\alpha_\eta}}^{2^{\alpha_{\eta+1}+1}-1}\frac{2^{\alpha_\eta(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_\eta}}^{1/4}}w_v$$

$$+\sum_{l=2^{\alpha_k}}^{j-1}\frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}w_l$$

$$=\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{\alpha_\eta(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_{\eta k}}}^{1/4}}\left(D_{2^{\alpha_\eta+1}}-D_{2^{\alpha_\eta}}\right)$$

$$+\frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\left(D_j-D_{2^{\alpha_k}}\right).$$

ვთქვათ $j\in N_{n_0}$, $x\in G/I_1$ და $2^{\alpha_k}\le j<2^{\alpha_k+1}$. მას შემდეგ რაც $\alpha_k\ge 2,\ j-2^{\alpha_k}\in N_{n_0}$ და

$$D_{j+2^{\alpha_k}}=D_{2^{\alpha_k}}+w_{2^{\alpha_k}}D_j$$

(2)-ის და (3)-ის გაერთიანებით მივიღებთ

$$\left|S_jf\right|=\left|\frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\left(D_j-D_{2^{\alpha_k}}\right)\right|=\left|\frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}w_{2^{\alpha_k}}D_{j-2^{\alpha_k}}\right|$$

$$=\left|\frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}w_{2^{\alpha_k}}w_{j-2^{\alpha_k}}r_0D_1\right|=\frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}.$$

ამიტომ

$$
\begin{aligned}
&\left\|S_j f\right\|_{weak-L_p}\\
&\geq \frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\left(x\in G:\left|S_j f\right|\geq \frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\right)^{1/p}\\
&\geq \frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\left(x\in G/I_1\ :\left|S_j f\right|\geq \frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\right)^{1/p} \qquad (11)\\
&= \frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}\left|G/I_1\right|\geq \frac{2^{\alpha_k(1/p-1)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{1/4}}.
\end{aligned}
$$

(1) და (11) გაერთიანებით

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{\left\|S_l f\right\|_{weak-L_p}^p \phi_l}{l^{2-p}}\\
&\geq \sum_{l=2^{\alpha_k}}^{2^{\alpha_k+1}-1}\frac{\left\|S_l f\right\|_{weak-L_p}^p}{l^{2-p}}\\
&\geq \phi_{2^{\alpha_k}}\sum_{\left\{l:2^{\alpha_k}\leq l\leq 2^{\alpha_k+1},\, l\in N_{n_0}\right\}}\frac{\left\|S_l f\right\|_{weak-L_p}^p}{l^{2-p}}\\
&\geq \frac{\phi_{2^{\alpha_k}}2^{\alpha_k(1-p)}}{\phi_{2^{\alpha_k}}^{p/4}}\sum_{\left\{l:2^{\alpha_k}\leq l\leq 2^{\alpha_k+1},\, l\in N_{n_0}\right\}}\frac{1}{l^{2-p}}\\
&\geq \phi_{2^{\alpha_k}}^{3/4}2^{\alpha_k(1-p)}\sum_{\left\{l:2^{\alpha_k}\leq l\leq 2^{\alpha_k+1},\, l\in N_{n_0}\right\}}\frac{1}{2^{(\alpha_k+1)(2-p)}}\\
&\geq \phi_{2^{\alpha_k}}^{3/4}2^{\alpha_k(1-p)}\frac{1}{2^{(\alpha_k+1)(1-p)}}\\
&\qquad\geq \phi_{2^{\alpha_k}}^{3/4}\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty.
\end{aligned}
$$

თეორემა 1-ის დამტკიცება დასრულებულია.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarly and A. I. Rubinshtein, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups, Baku, Ehim, 1981 (in Russian).
2. R. Coifman, G. Weiss, Extensions of the Hardy spaces and their use in analysis. Bull. Amer. Math. Soc. 83, (1977), 569-645.
3. G. Gát, Inverstigations of certain operators with respect to the Vilenkin sistem, Acta Math. Hung., 61 (1993), 131-149.
4. L. D. Gogoladze, On the strong summability of Fourier series, Bull of Acad. Scie. Georgian SSR, 52, 2 (1968), 287-292.
5. U. Goginava, L. D. Gogoladze, Strong Convergence of Cubic Partial Sums of Two-Dimensional Walsh-Fourier series, Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010: In memory of Borislav Bojanov. Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012, pp. 108-117.
6. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some new properties of Fourier constants. J. London Math. Soc. 6, (1931), 3-9 .
7. R. Paley, A remarkable series of orthogonal functions. Proc. London Arc. Mat. 14, (1976), 179-187.
8. F.Schipp, W.R. Wade, P. Simon. J. Pál, Walsh series, An Introduction to Duadic Harmonic Analysis, Akademiai Kiadó, (Budapest-AdamHilger (Bristol-New-York)), 1990.
9. P. Simon, Strong Convergence Theorem for Vilenkin-Fourier Series. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 245, (2000), pp. 52-68.
10. P. Simon, Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series, Acta Math. Hung., 49 (1-2) (1987), 425-431.
11. P. Simon, F. Weisz, Paley type inequalities for Vilenkin-Fourier coefficients, (Acta. Sci. Math. Szeged), 63 (1997), 10-124.
12. B. Smith, A strong convergence theorem for $H_1(T)$, in Lecture Notes in Math., 995, Springer, Berlin, (1994), 169-173.
13. N. Ya. Vilenkin, A class of complate ortonormal systems, Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R., Ser. Mat., 11 (1947), 363-400.
14. F. Weisz, Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier Analysis, Springer, Berlin-Heideiberg-New York, 1994.
15. F. Weisz, Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy space, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
16. F. Weisz, Hardy-Littlewood inequalities for Ciesielski-Fourier series, Analysis Mathematica, 31 (2005), 217-233.
17. F.Weisz, Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series. (English) Stud. Math. 117, No.2, (1996), 173-194.