ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი ტეფნაძე

დოქტორანტის I კოლოქვიუმი

„უოლშ-ფეიერის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის შესახებ“

ხელმძღვანელი
სრული პროფესორი:
უშანგი გოგინავა

თბილისი
2014 წ.

სარჩევი

შესავალი 3

განმარტებები და აღნიშვნები 5

აუცილებელი წინადადებები 12

ძირითადი შედეგების ფორმულირება 14

ძირითადი შედეგების დამტკიცება 18

გამოყენებული ლიტერატურა 38

შესავალი

როგორც ცნობილია, უოლშის სისტემა არ ქმნის ბაზისს L_1 სივრცეში. უფრო მეტიც არსებობს ფუნქცია ორობით მარტინგალურ სივრცეში H_1 ისეთი, რომ ამ ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივი არ არის შემოსზღვრული L_1-ში.

შიმონმა [18] დაამტკიცა, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f\|_1}{k}\leq c\|f\|_{H_1},$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი, საიდანაც მარტივად მიიღება გატის [5] მიერ დამტკიცებული ძლიერად შეჯამებადობის თეორემა

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f-f\|_1}{k}\to 0,\ \text{როცა}\ n\to\infty.$$

ანალოგიური შედეგები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ დამტკიცებულია შმიდტის [20] მიერ.

შიმონმა [17] (იხილეთ აგრეთვე [19] და [24]) აგრეთვე აჩვენა, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|S_k f\|_p}{k^{2-p}}\leq c_p\|f\|_{H_p},$$

სადაც $0<p<1$ და c_p არის აბსოლუტური მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

აქედან ადვილად მიიღება ძლიერად შეჯამებადობის შემდეგი თეორემა:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f-f\|_p}{k^{1-p}}\to 0,\quad \text{როცა}\ n\to\infty$$

სადაც $0<p<1$.

ვეისმა [26] დაამტკიცა, რომ უოლშ-ფეიერის საშუალოები შემოსაზღვრულია H_p-დან H_p-ში, როცა p>1/2.

თეორემა W. ვთქვათ p>1/2 და $f\in H_p$. მაშინ

$$\|\sigma_k f\|_{H_p}\leq\|f\|_{H_p}.$$

ამ თეორემიდან დავასკვნით

$$\frac{1}{n^{1-2p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_p}{k^{2-2p}}\leq\|f\|_{H_p},\ \text{სადაც p>1/2.}$$

გოგინავამ [10] (იხილეთ აგრეთვე [21]) აჩვენა, რომ შემოსაზღვრულობას არა აქვს ადგილი H_p-დან H_p-ში, როცა $0<p\leq 1/2$. მან აჩვენა, რომ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$-დან ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in N}\|\sigma_n f\|_{H_p}=\infty,$$

როცა $0<p\leq 1/2$.

გოგინავას ზემოთ ნახსენები თეორემის შემდეგ მიზანშეწონილია უოლშ-ფეიერის საშუალოებისთვის ძლიერად შეჯამებადობის საკითხების დასმა. ჩვენ მიმოვიხილეთ მოცემული პრობლემები და გავეცით ამომწურავი პასუხი. კერძოდ, ვაჩვენეთ შემდეგი უტოლობების სამართლიანობა:

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{k}\le c\|f\|_{H_p}^p, \qquad (n\in N)$$

და

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{k^{2-2p}}\le c\|f\|_{H_p}^p, \qquad (0<p<1/2).$$

მოცემული თეორემიდან მივიღებთ ძლიერად კრებადობის შემდეგ თეორემებს:

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f-f\|_{H_p}^p}{k}\to 0, \quad \text{როცა} \quad n\to\infty$$

და

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f-f\|_{H_p}^p}{k^{1-2p}}\to 0, \quad \text{როცა} \qquad n\to\infty,$$

სადაც $0<p<1/2.$

ჩვენ ასევე დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი არაკლებადი $\phi:N\to R$ ფუნქციისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^{2-p}}{\phi(k)}=\infty,$$

არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$, სადაც $0<p\le 1/2$, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{\phi(k)}=\infty.$$

როცა p=1/2 ჩვენ ასევე ვაჩვენებთ, რომ

$$\sup_{\|f\|_{H_{1/2}}\le 1}\sup_{n\in N}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2}=\infty, \quad \text{სადაც} \ f\in H_{1/2}.$$

ფეიერის საშუალოების სხვადასხვა აზრით შეჯამებადობის შესახებ მეტად საგულისხმოა აგრეთვე სტატიები [3,4], [7,8], [14,15], [22,23].

განმარტებები და აღნიშვნები

N_+ $-$ით ავღნიშნოთ მთელი დადებით რიცხვების სიმრავლე, ხოლო N $-$ით მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე $N := N_+ \cup \{0\}$.

განვიხილოთ დისკრეტული ორობითი ჯგუფი Z_2:={0,1}, mod(2) შეკრების ოპერაციის მიმართ. Z_2-ზე გვაქვს ჰაარის ზომა, თითოეულ ელემენტის ზომა არის 1/2. G $-$თი ავღნიშნოთ ამ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი $G = \prod_{k=0}^{\infty} Z_2$.

G-ს ელემენტებს წარმოადგენს მიმდევრობები $x = (x_i, i \in N)$, სადაც $x_i = 0{,}1$, ($i \in N$). მოცემულ ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია განიმარტება, როგორც შესაბამისი კოორდინატების mod(2)-ით ჯამი. ე.ი

$$G := \left\{ x := \left(x_0, ..., x_n, ...\right) : x_i = 0 \vee 1, i = 0,1,2,,,, \right\}.$$

G სიმრავლეზე შეკრების ოპერაცია განიმატება შემდეგნაირად: ნებისმიერი $x = \left(x_0, ..., x_n, ...\right)$ და $y = \left(y_0, ..., y_n, ...\right)$ განსაზღროთ

$$x + y := \left(\left|x_0 - y_0\right|, ..., \left|x_n - y_n\right|, ...\right).$$

G-ს ნულოვანი ელემენტი არის $0 := \left(0, ..., 0, ...\right)$, ხოლო $x = \left(x_0, ..., x_n, ...\right)$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი არის თავის თავი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ G სიმრავლე ზემოთ შემოტანილი ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს აბელის ჯგუფს. ამ ჯგუფს ორობით ან უოლშის ჯგუფს უწოდებენ.

შემოვიღოთ G ჯგუფზე მეტრიკა. ნებისმიერი $x \in G$ განსაზღვროთ

$$|x| := \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-(k+1)}$$

ადვილი დასანახია, რომ $|x| \geq 0$ და $|x| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $x = 0$ და

$$\left||x| - |y|\right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

თუ შემოვიღებთ შემდეგ ფუნქციას $d\left(x, y\right) = |x + y|$, მაშინ ის დააკმაყოფილებს მეტრიკული სივრცის სამივე აქსიომას.

ვთქვათ $x = \left(x_0, ..., x_n, ...\right)$ და $y = \left(y_0, ..., y_n, ...\right)$. ვიტყვით, რომ $x < y$ თუ არსებობს $n \in N$ ისეთი, რომ $x_j = y_j$, $j = 0,1,...,n-1$ და $x_n < y_n$. ვიტყვით, რომ $x \leq y$ თუ $x < y$ ან $x = y$.

ვთქვათ $I_0(x) := G$, ხოლო ნებისმიერი $x \in G$ და $n \in N_+$ განვსაზღროთ

$$I_n\left(x\right) := \left\{ y \in G : y_i = x_i, 0 \leq i < n \right\}.$$

$I_n\left(x\right)$-ს უწოდებენ G ჯგუფის n-ური რანგის ორობით ინტერვალს, რომელიც შეიცავს x-ს.

თუ გამოვიყენებთ ღია და ჩაკეტილი ბირთვების განმარტებებს, მივიღებთ, რომ $I_n(x)$ ერთდროულად ღიაცაა და ჩაკეტილი. მართლაც

$$\left\{ x : x \in X, \quad \rho(x, x_0) < \frac{1}{2^{n-1}} \right\} = \left\{ x : x \in X, \quad \rho(x, x_0) \leq \frac{1}{2^n} \right\}.$$

მტკიცდება, რომ G ჯგუფზე არსობს ზომა μ, რომელსაც ჰაარის ზომას უწოდებენ. $I_n\left(x\right)$-ის ორობითი ინტერვალისათვის სამართლიანია შემდეგი:

$$\mu\left(I_n\left(x\right)\right) = 2^{-n}, \quad \mu\left(I_n\left(x\right) + y\right) = \mu\left(I_n\left(x\right)\right).$$

აღვნიშნოთ $I_n := I_n(0)$ და $\overline{I_n} := G \setminus I_n$, e_i-თი აღვნიშნოთ G ჯგუფის ის ელემენტი, რომლის i-ურ ადგილზე არის ერთიანი, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე კი 0, მაშასადამე $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots)$. ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $x \in G$ ადგილი აქვს წარმოდგენას $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$.

ადვილი სანახავია, რომ

(1) $$\overline{I_M} = \left(\bigcup_{k=0}^{M-2} \bigcup_{l=k+1}^{M-1} I_{l+1}(e_k + e_l) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{M-1} I_M(e_k) \right).$$

ყოველი N-თვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, სადაც $n_i \in \{0,1\}$ და მხოლოდ n_i-ების სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან. თუ ავღნიშნავთ $|n| := \max\{ j \in N, n_j = 0\}$, მაშინ გვექნება $2^{|n|} \le n \le 2^{|n|+1}$.

ნებისმიერი ორი $n, m \in N$ განმარტოთ

$$n \oplus m := \sum_{k=0}^{\infty} |n_k - m_k| 2^k .$$

ნებისმიერი ნატურალური $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$ რიცხვის ვარიაცია ავღნიშნოთ

$$V(n) = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|.$$

ყოველი $n = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n_i}$-თვის, სადაც $n_1 < n_2 < \dots < n_s$ ავღნიშნოთ

$$n^{(i)} = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_{i-1}}, \quad i = 2,\dots,s$$

და

(2) $$N_{0,2} = \left\{ n \in N : n = 2^0 + 2^2 + \sum_{i=3}^{s_n} 2^{n_i} \right\}.$$

ყოველი $n \in N$-თვის არსებობს ნატურალური რიცხვები, $0 \le l_1 \le m_1 \le l_2 - 2 < l_2 \le m_2 \le \dots \le l_s - 2 < l_s \le m_s$, ისეთი, რომ $n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{m_i} 2^k$, სადაც s დამოკიდებულია მხოლოდ n-ზე. ადვილი სანახავია, რომ $s \le V(n) \le 2s + 1$.

განვიხილოთ p ხარისხსით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე $L_p(G)$ ნორმით

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad (0 < p < +\infty).$$

$L_\infty(G)$-თი აღვნიშნოთ, ყველა იმ ზომად ფუნქციათა კლასი, რომელთათვისაც სამართლიანია

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ C > 0 : \mu\left(\left\{ x \in G : |f(x)| > C \right\} \right) = 0 \right\} < \infty$$

$weak\text{-}L_p(G)$ სივრცე შეიცავს ზომად ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(|f| > \lambda)^{1/p} < +\infty, \quad (0 < p < +\infty).$$

ვთქვათ f უწყვეტი ფუნქციაა განსაზღრული G ჯგუფზე. ვიტყვით, რომ f არის ჯგუფის მახასიათებელი თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$f(x+y)=f(x)f(y), \qquad |f(x)|=1.$$

G ჯგუფზე განსაზღრული ყველა მახასიათებელთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\hat{G}$ - თი.

განვმარტოთ k -ური რადემახარის ფუნქცია:

$$r_k(x):=(-1)^{x_k}, \ (k\in N, \ x\in G).$$

განვსაზღვროთ უოლშის სისტემა, როგორც

$$w_n(x):=\prod_{k=0}^{\infty}(r_k(x))^{n_k}=r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1}n_k x_k} \quad (n\in N).$$

სადაც $n=\sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i, \quad n_i=0\vee 1$.

ადვილი დასანახია, რომ $w_n\in\hat{G}$. უფრო მეტიც, ნებისმიერი მახასიათებელი ემთხვევა უოლშის ფუნქციას, რომელიმე n-თვის.

ვთქვათ $n,m\in N$, მაშინ

$$\int_G w_n(x)w_m(x)d\mu(x)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

ე.ი უოლშის სისტემა ორთოგონალურია. უფრო მეტიც ის წარმოადგენს სრულ სისტემას $L_2(G)$-ში.

განვიხილოთ კერძო ჯამები უოლშის სისტემის მიმართ

$$S_M(f):=\sum_{i=0}^{M-1}\hat{f}(i)w_i(x), \quad (i\in N)$$

სადაც $\hat{f}(i)$ წარმოადგენს f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს i -ურ კოეფიციენტს უოლშის სისტემის მიმართ:

$$\hat{f}(i):=\int_G f(x)w_i(x)d\mu(x), \quad (i\in N)$$

როგორც ცნობილია $\hat{f}(n)\to 0$ როცა $n\to\infty$, ყოველი $L_1(G)$-თვის.

ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$S_n(f(x))=\int_G f(t)D_n(x+t)d\mu(t),$$

სადაც

$$D_n=\sum_{k=0}^{n-1}w_k, \qquad (i\in N).$$

დირიხლეს გული ეწოდება.

ვთქვათ $n:=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_r}$, $n_1>n_2>\cdots>n_r\geq 0$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

(3) $$D_n(x)=\psi_n(x)\sum_{i=1}^{r}\psi_{2^{n_i}}(x)D_{2^{n_i}}(x)=\psi_n(x)\sum_{i=1}^{r}r_{n_i}D_{2^{n_i}}(x).$$

კარგადაა ცნობილი, რომ (იხილეთ 28)

(4) $$D_{2^n}=\begin{cases}2^n, x\in I_n,\\ 0, x\notin I_n.\end{cases}$$

ავღნიშნოთ $L_n=\|D_n\|_1$ და მას ვუწოდოთ n-ური ლებეგის კონსტანტა. მისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასებები (იხილეთ [13])

(5) $$\frac{V(n)}{8} \le L_n \le V(n)$$

ფაინმა [3] დაამტკიცა, რომ სამართლიანია შემდეგი:

(6) $$\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n} V(k) = \frac{1}{4\log 2} + o(1).$$

კარგადაა ცნობილი, რომ $\forall x \in [0,1)$ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$, $a_i = 0 \vee 1$; ამასთან ეს წარმოდგენა ერთადერთია თუ a_i მნიშვნელობებს შორის ნულების უსასრულო რაოდენობაა. ვთვათ

$$G := \{x : x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...), x_j = 0 \vee 1,\ j = 0,1,2...\}.$$

განვიხილოთ ასახვა $|\cdot| : G \to [0,1)$ განსაზღვრული შემდეგნაირად $|x| := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{2^{j+1}}$. G_1-ით ავღნიშნოთ G სიმრავლის ის ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს ნულების სარულ რაოდენობას. ადვილი დასანახია, რომ G_1 თვლადი სიმრავლეა. ვთქვათ $G' := G \setminus G_1$. ცნობილია, რომ G' და $[0,1)$ ინტერვალს შორის $|\cdot|$ არის ურთიერთცალსახა ასახვა, G'-ზე განსაზღრული ოპერაცია გადაიტანება $[0,1)$ ინტერვალზე. ვთქვათ $x, y \in [0,1)$ მაშინ $x \dot{+} y := |\rho(x) + \rho(y)|$ რომელიც ექვივალენტურია $x \dot{+} y = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k-1}$. $\{w_n : n \in N\}$ ონს შესაძლებელია გადატანილ $\left([0, 1\dot{+})\right)$-ში. ვთქვათ $r_n(x) := \rho_n(\rho(x))$. r_n ფუნქციას უწოდებენ რადემახარის ფუნქციას. ადვილი დასანახია, რომ

$$r_n(x) = (-1)^{x_n} = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{2l}{2^{n+1}}, \frac{2l+1}{2^{n+1}}\right) \\ -1, x \in \left[\frac{2l+1}{2^{n+1}}, \frac{2l+2}{2^{n+1}}\right) \end{cases}, l = 0,1,...,2^n - 1.$$

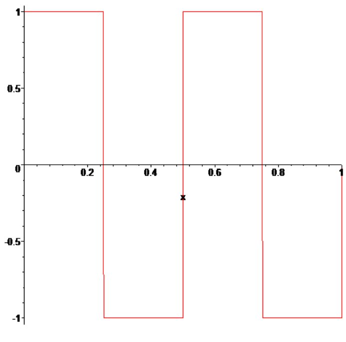
ასევე ადვილი დასანახია, რომ

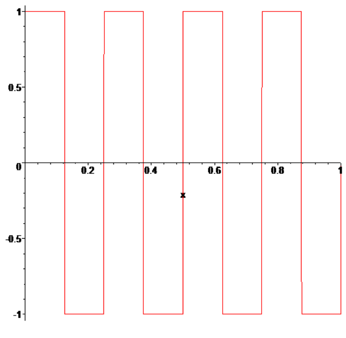
$$\rho_n(x) = r_n(|x|), x \in G', \quad w_n(x) = \psi_n(\rho(x)), \quad \psi_n(x) = w_n(|x|), x \in G'.$$

$\psi_n(x)$ ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\psi_n(x+y) = \psi_n(x)\psi_n(y)$. ასევე სამართლიანია შემდეგი

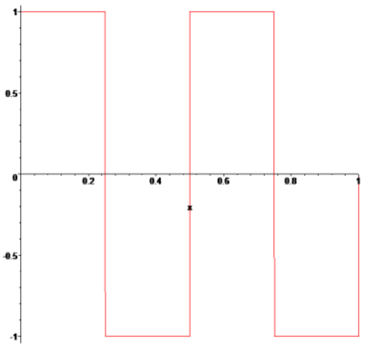
$$w_n\left(x \dot{+} y\right) = w_n(x) w_n(y) \quad \left(n \in N, x, y \in [0,1), x \dot{+} y \notin Q\right).$$

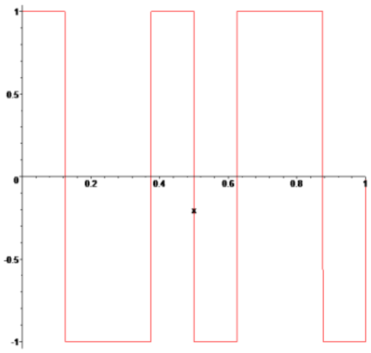
პროგრამა Maple-ს მეშვეობით ავაგოთ რადემახერის ფუნქცია





ავაგოთ უოლშის ფუნქციები:





ფეიერის n-ური საშუალო ($(C,1)$-საშუალო) განიმარტება შემდეგნაირად

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k f, \quad n \in N_+, \;\; \sigma_0 f := 0,$$

ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$\sigma_n\left(f(x)\right) = \int_G f(t) K_n(x+t)\, d\mu(t),$$

სადაც K_n არის ფეიერის n-ური გული:

$$K_n f := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k f, \quad n \in N_+$$

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას (იხილეთ [6]).

n-ური ფეიერის გულისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

(7)
$$nK_n = \sum_{r=1}^{s}\left(\prod_{j=r+1}^{s} w_{2^{n_j}}\right) 2^{n_r} K_{2^{n_r}} + \sum_{r=2}^{s}\left(\prod_{j=t+1}^{s} w_{2^{n_j}}\right) 2^{n^{(t)}} D_{2^{n_t}},$$

სადაც $n = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n_i}, \;\; n_1 < n_2 < \ldots < n_s.$

ვთქვათ, $n > t, \; t, n \in N$, $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. მაშინ (იხილეთ [6])

(8)
$$K_{2^n}(t) = \begin{cases} 2^{n-1} + 1/2, t \in I_n(0) \\ 2^{s-1}, t \in I_n(e_s) \\ 0, t \in I_n(e_s + e_l), s \neq l, s, l = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

აქედან ადვილად მიიღება ფეიერის გულის შემდეგი შეფასებები (იხილეთ [11,13])

(9)
$$n\left|K_n(x)\right| \leq c \sum_{s=1}^{|n|} 2^s \left|K_{2^s}(x)\right|,$$

(10)
$$\sup_{n \in N} \int_G \left|K_n(x)\right| d\mu(x) \leq c < \infty$$

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია სრული ალბათური სივრცე (Ω, F, P). G არის F $\sigma-$ალგებრის სრული ქვე-$\sigma-$ალგებრა $G \subset F$. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებია, ისეთები რომ $E|\xi| := \|\xi\|_1 < \infty$ და $E|\eta| := \|\eta\|_1 < \infty$ და η G-ზომადია. η შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ξ შემთხვევით სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი G $\sigma-$ალგებრის და აღინიშნება $[\xi \mid G]$ სიმბოლოთი, თუ ნებისმიერი A ხდომილებისთვის G $\sigma-$ალგებრიდან ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$E(\xi\chi_A) := \int_A \xi\, d\mu(x) = \int_A \eta\, d\mu(x) =: E(\eta\chi_A).$$

თუ η_1 და η_2 შემთხვევითი სიდიდები წარმოადგენენ ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინს G $\sigma-$ალგებრის მიმართ, მაშინ $\eta_1 = \eta_2$ P-თ.ყ.

დავუშვათ, რომ $D = \{D_1, D_2, ...\}$ სასრული ან თვლადი დაყოფაა Ω-სი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $D_i : \bigcup_i D_i = \Omega,$ $P(D_i) > 0,$ $i \geq 1.$ თუ $G = \sigma(D),$ მაშინ

$$E(\xi \mid D) = E(\xi \mid D_i), \text{ ანუ } E(\xi \mid D) = \frac{E(\xi D_i)}{P(D_i)},$$ (P-თ.ყ სიმრავლეზე D_i),

$\sigma-$ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია 2^{-k} ზომის მქონე ორობითი ინტერვალებით $I_k(x)$ $(x \in G)$ ავღნიშნოთ $F_k(k \in N)$-თი და F-ით $F = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right).$

ვთქვათ f F-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, სადაც $F = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right).$ მაშინ პირობითი მათემატიკური ლოდინი F_k $\sigma-$ალგებრის მიმართ არსებობს, ერთადერთია და ის ემთხვევა f შემთხვევითი სიდიდის 2^k-ურ კერძო ჯამს $E(f, F_k) = S_{2^k}(f(x))$ $(k \in N).$

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია სრული ალბათური სივრცე (Ω, F, P) და F $\sigma-$ალგებრის სრულ ქვე-$\sigma-$ალგებრათა ზრდადი ოჯახი $F_k(k \in N)$, k=1,2,…, $F_k \subset F_{k+1} \subset F.$ გარდა ამისა, მოცემულია ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_n, E|\xi_k| := \|\xi_k\|_1 < \infty,$ $k = 1,2,....$ შემთხვევით სიდიდეთა ξ_n n=1,2,… მიმდევრობას ეწოდება შესაბამისად მარტინგალი, სუბმარტინგალი, სუპერმარტინგალი $\sigma-$ალგებრათა $F_k(k \in N)$, k=1,2,… ნაკადის მიმართ თუ ყოველი n-თვის, n=1,2,… შემთხვევითი სიდიდე ξ_n ზომადია F_n $\sigma-$ალგებრის მიმართ და თითქმის ყველგან სრულდება შემდეგი თანაფარდობები: $E(\xi_n \mid F_k) = \xi_k,$ $n > k.$

ავღნიშნოთ $f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ -ით მარტინგალი $F_k(k \in N)$ ნაკადის მიმართ. f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^* = \sup_{n \in N} \left| f^{(n)} \right|.$$

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახითაც

$$f^* = \sup_{n \in N} \frac{1}{\mu(I_n(x))} \left| \int_{I_n(x)} f(u) d\mu(u) \right|.$$

ჰარდის მარტინგალების სივრცე $H_p(G)$ (0< $p < \infty$) შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_p < \infty.$$

მარტინგალისთვის $f = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$ განვიხილოთ შეუღლებული გარდაქმნა, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად $\tilde{\tilde{f}}^{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t)(f_n - f_{n-1}),$ სადაც $t \in G$ არის ფიქსირებული. შევნიშნოთ, რომ $\tilde{\tilde{f}}^{(0)} = f.$ როგორც ცნობილია (იხილეთ [26])

(11) $$\left\| \tilde{\tilde{f}}^{(t)} \right\|_{H_p} = \|f\|_{H_p}, \qquad \|f\|_{H_p} = \int_G \left\| \tilde{\tilde{f}}^{(t)} \right\|_p^p d\mu(t).$$

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება $p-$ატომი თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

(12) $$\int_G a d\mu = 0, \qquad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p}, \qquad \sup p(a) \subset I.$$

ვეისმა [23] (იხილეთ აგრეთვე [16]) $p-$ატომების საშუალებით მოგვცა $H_p(G)$ ($0 < p \le 1$) სივრცეების ახალი დახასიათება:

თეორემა W1 (*Weisz*) მარტინგალი $f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ ეკუთვნის $H_p(G)$ ($0 < p \le 1$) მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ატომების მიმდევრობა $(a_k, k \in N)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $(\mu_k, k \in N)$ ისეთი რომ ყოველი $n \in N$-თვის

(13) $$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n}(a_k) = f^{(n)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty.$$

უფრო მეტიც $\|f\|_{H_p} \approx \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p\right)^{1/p}$, სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო წარმოდგენებს შორის, რომელთაც აქვთ (13)-ს სახე.

ამ თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა W2 (*Weisz* [25]) ვთქვათ T სუბწრფივი ოპერატორია და $0 < p \le 1$-თვის

$$\sup_{\rho > 0} \rho^p \left\{x \in G \setminus I : |Ta| > \rho\right\} \le c_p < \infty,$$

ყოველი p ატომისთვის a, სადაც I აღნიშნავს a ატომის სუპორტს. თუ T შემოსაზღვრულია L_∞ დან L_∞-ში, მაშინ

$$\|Tf\|_p \le c_p \|f\|_{H_p},$$

თუ დამატებით $p < 1$, მაშინ T-ს აქვს სუსტი (1,1) ტიპი. ე.ი. თუ $f \in L_1$, მაშინ

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \, \mu\{|Ta| > \lambda\} \le c\|f\|_1.$$

$f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ მარტინგალისათვის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები განიმარტება შემდეგი განსხვავებული გზით:

$$\hat{f}(i) := \lim_{k \to \infty} \int_G f^{(k)}(x) w_i(x) d\mu(x), \quad (i \in N).$$

თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ $\left(S_{2^n}(f) : n \in N\right)$ არის მარტინგალი და $f \in L_1(G)$ ფუნქციის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტები ემთხვევა $\left(S_{2^n}(f) : n \in N\right)$ მარტინგალის შესაბამის უოლშ-ფურიეს კოეფიციენტებს.

აუცილებელი წინადადებები

ლემა 1. ვთქვათ $x\in I_{l+1}(e_k+e_l),\quad k=0,\dots,M-2,\quad l=0,\dots,M-1.$ მაშინ

$$\int_{I_M}|K_n(x+t)|d\mu(t)\le\frac{c2^{l+k}}{n2^M}.$$

ვთქვათ $x\in I_M(e_k),\quad k=0,\dots,M-1.$ მაშინ

$$\int_{I_M}|K_n(x+t)|\,d\mu(t)\le\frac{c2^k}{2^M}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x\in I_{l+1}(e_k+e_l),\quad k=0,\dots,M-2,\quad l=0,\dots,M-1.$ მაშინ (8) და (9)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}n|K_n(x)|&\le c\sum_{s=1}^{l}2^s\left|K_{2^s}(x)\right|\le c\sum_{s=1}^{k}2^s\left|K_{2^s}(x)\right|+c\sum_{s=k+1}^{l}2^s\left|K_{2^s}(x)\right|\\&\le c\sum_{s=1}^{k}2^{2s}+c\sum_{s=k+1}^{l}2^{k+s}\le c\sum_{s=1}^{k}2^{2s}+c2^k\sum_{s=1}^{l}2^s\\&\le c2^{2k}+c2^{k+l}\le c2^{k+l}.\end{aligned}$$

საიდანაც

$$\int_{I_M}|K_n(x+t)|d\mu(t)\le\frac{c2^{l+k}}{n2^M}.$$

ვთქვათ $x\in I_M(e_k),\quad k=0,\dots,M-1.$ მაშინ გვაქვს შემდეგი შემთხვევები:

$$\begin{cases}t\in I_{|n|}\left(0,\dots,x_N,\dots,x_{|n|-1}\right),\\x\in I_{|n|}\left(0,\dots,x_k,0,\dots x_N,\dots,x_{q-1},1-x_q,t_{q+1},\dots,t_{|n|-1}\right),\end{cases}$$

სადაც $q=N,\dots,A-1.$ მაშინ

$$n|K_n(x)|\le c\sum_{=1}^{q}2^s\left|K_{2^s}(x)\right|\le c2^{2k}+c2^{k+q}\le c2^{k+q}.$$

რადგან $2^q\le2^{|n|}\le n$ მივიღებთ

$$\int_{I_M}|K_n(x+t)|d\mu(t)\le\frac{c2^{l+q}}{n2^M}\le\frac{c2^l}{2^M}.$$

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. ვთქვათ $x\in I_M(e_k),\quad k=0,\dots,M-1.$ მაშინ

$$\begin{cases}t\in I_{|n|}\left(0,\dots,x_N,\dots,x_{|n|-1}\right),\\x\in I_{|n|}\left(0,\dots,x_N,\dots,x_{|n|-1}\right).\end{cases}$$

მაშინ

$$n|K_n(x)|\le c\sum_{=1}^{|n|}2^s\left|K_{2^s}(x)\right|\le c2^{2k}+c2^{k+|n|}\le c2^{k+|n|}$$

და

$$\int_{I_M}|K_n(x+t)|d\mu(t)\le\frac{c2^{l+|n|}}{n2^M}\le\frac{c2^l}{2^M}.$$

შემდეგი უტოლობები არის განზოგადება [4, 5]-ში მიღებული ფეიერის გულის შეფასებებისა.

ლემა 2. ვთქვათ $n=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{m_i}2^k$, სადაც

$$0\le l_1\le m_1\le l_2-2<l_2\le m_2\le\ldots\le l_s-2<l_s\le m_s.$$

მაშინ

$$n\left|K_n(x)\right|\ge\frac{2^{2l_i}}{16},$$

სადაც $x\in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)$.

დამტკიცება. (7)-ის დახმარებით მივიღებთ

$$nK_n(x)=\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=l_r}^{m_r}\left(\prod_{j=r+1}^{s}\prod_{q=l_j}^{m_j}w_{2^q}\prod_{j=k+1}^{m_r}w_{2^j}\right)2^kK_{2^k}$$

$$+\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=l_r}^{m_r}\left(\prod_{j=r+1}^{s}\prod_{q=l}^{m_j}w_{2^q}\prod_{j=k+1}^{m_r}w_{2^j}\right)\left(\sum_{t=0}^{r-1}\sum_{q=l_t}^{m_t}2^q+\sum_{q=l_t}^{k-1}2^q\right)D_{2^k}.$$

ვთქვათ $x\in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)$. მაშინ

$$n\left|K_n\right|\ge\left|2^{l_i}K_{2^{l_i}}\right|-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{k=l_r}^{m_r}2^k\left|K_{2^k}\right|-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{k=l_r}^{m_r}2^k\left|D_{2^k}\right|$$

$$=I-II-III.$$

(8)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=\left|2^{l_i}K_{2^{l_i}}\right|=\frac{2^{2l_i}}{4}.$$

მას შემდეგ რაც $m_{i-1}\le l_i-2$ ჩვენ დავასკვნით, რომ

$$II\le\sum_{k=1}^{l_i-2}2^k\left|K_{2^k}\right|\le\sum_{k=1}^{l_i-2}2^k\frac{2^k+1}{2}\le\frac{2^{2l_i}}{24}+\frac{2^{l_i}}{4}-\frac{2}{3}.$$

III-თვის მივიღებთ

$$III\le\sum_{k=1}^{l_i-2}2^k\left|D_{2^k}\right|\le\sum_{k=1}^{l_i-2}4^k\le\frac{2^{2l_i}}{12}-\frac{1}{3}.$$

(3), (4) გაერთიანებით მივიღებთ

$$n\left|K_n\right|\ge I-II-III\ge\frac{2^{2l_i}}{8}-\frac{2^{l_i}}{4}+1.$$

დავუშვათ რომ $l_i\ge 2.$ მაშინ

$$n\left|K_n\right|\ge\frac{2^{2l_i}}{8}-\frac{2^{2l_i}}{16}\ge\frac{2^{2l_i}}{16}.$$

დავუშვათ რომ $l_i=0,$ ან $l_i=1.$მაშინ

$$n\left|K_n\right|\ge\frac{7}{8}\ge\frac{2^{2l_i}}{16}.$$

რაც ასრულებს ლემის დამტკიცებას.

ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1. ვთქვათ $0 < p \le 1/2$ და $f \in H_p$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი რომ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^{p}}{k^{2-2p}} \le c_p \|f\|_{H_p}^{p},$$

სადაც $[1/2+p]$ აღნიშნავს $1/2+p$ ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

თეორემა 2. ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $\phi : N \to R$ ნებისმიერი არაკლებადი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^{2-2p}}{\phi(k)} = \infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$, $(0 < p < 1/2)$, ისეთი რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^{p}}{\phi(k)} = \infty.$$

თეორემა 3. ვთქვათ $f \in H_{1/2}$. მაშინ

$$\sup_{\|f\|_{H_{1/2}}\le 1}\ \sup_{n\in N}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2} = \infty.$$

შედეგი 1. ვთქვათ ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p$. მაშინ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f - f\|_{H_p}^{p}}{k^{1-2p}} \to 0, \quad \text{როცა } n \to \infty.$$

შედეგი 2. ვთქვათ $f \in H_{1/2}$. მაშინ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f - f\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{k} \to 0, \quad \text{როცა } n \to \infty.$$

ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა 1-ის დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \le c\|f\|_{H_p}^p,$$

სადაც $0<p\le 1/2$ და $[1/2+p]$ აღნიშნავს $1/2+p$ ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს. (11)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{k^{2-2p}} \le \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_G \left\|\sigma_k \tilde{\tilde{f}}^{(t)}\right\|_p^p d\mu(t)}{k^{2-2p}}$$

$$\le \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_G \left\|\sigma_k \tilde{\tilde{f}}^{(t)}\right\|_p^p d\mu(t)}{k^{2-2p}} \le \int_G \left(\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\|\sigma_k \tilde{\tilde{f}}^{(t)}\right\|_p^p}{k^{2-2p}}\right) d\mu(t)$$

$$\le c_p \int_G \left\|\tilde{\tilde{f}}^{(t)}\right\|_{H_p}^p d\mu(t) \approx c_p \int_G \|f\|_{H_p}^p d\mu(t) \le c_p \|f\|_{H_p}^p.$$

ვეისის თეორემების W1-ის და W2-ის გამოყენებით თეორემა 1 იქნება დამტკიცებული, თუ ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k a\|_p^p}{k^{2-2p}} \le c<\infty, \quad m=1,2,...$$

ყოველი p-ატომისთვის a. ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ a-ს სუპორტი არის I, სადაც $\mu(I)=2^{-M}$ და $I=I_M$. ადვილი სანახავია, რომ $\sigma_n(a)=0$, როცა $n\le 2^M$. შებრუნებით, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ $n>2^M$.

ვთქვათ $x\in I_M$. მას შემდეგ რაც σ_n არის შემოსაზღვრული L_∞-დან L_∞-ში (შემოსაზღვრულობა მარტივად მიიღება (10)-დან) და $\|a\|_\infty \le 2^{M/p}$ ჩვენ მივიღებთ

$$\int_{I_M}|\sigma_m a(x)|^p d\mu(x) \le \|a\|_\infty^p/2^M \le c<\infty, \quad 0<p\le 1/2.$$

ვთქვათ $0<p\le 1/2.$ მაშინ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{I_M}|\sigma_k a(x)|^p d\mu(x)}{k^{2-2p}} \le \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2-2p}} \le c<\infty.$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$|\sigma_m a(x)| \le \int_{I_M}|a(x)||K_m(x+t)|d\mu(t) \le \|a\|_\infty \int_{I_M}|K_m(x+t)|d\mu(t)$$

$$\le 2^{M/p}\int_{I_M}|K_m(x+t)|d\mu(t).$$

ლემა 1-ის გამოყენებით მივიღებთ

(14) $$|\sigma_m a(x)| \le \frac{c2^{k+l}2^{M(1/p-1)}}{m}, \quad x\in I_{l+1}(e_k+e_l),\ 0\le k<l<M$$

და

(15) $$\left|\sigma_m a(x)\right| \le c 2^{M(1/p-1)} 2^k, \quad x \in I_{l+1}(e_k),\ 0 \le k < M.$$

(1) და (14)-(15)-ის გაერთიანებით

$$\int_{\overline{I_M}} \left|\sigma_m a(x)\right|^p d\mu(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \int_{I_{l+1}(e_k+e_l)} \left|\sigma_m a(x)\right|^p d\mu(x) + \sum_{k=0}^{M-1} \int_{I_M(e_k)} \left|\sigma_m a(x)\right|^p d\mu(x)$$
$$\le c \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \frac{1}{2^l} \frac{2^{p(k+l)} 2^{M(1-p)}}{m^p} + c \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2^M} 2^{M(1-p)} 2^{pk}$$
$$\le \frac{c 2^{M(1-p)}}{m^p} \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \frac{2^{p(k+l)}}{2^l} + c \sum_{k=0}^{M-1} \frac{2^{pk}}{2^{pM}} \le \frac{c 2^{M(1-p)} M^{[1/2+p]}}{m^p} + c.$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_{\overline{I_M}} \left|\sigma_k a(x)\right|^p d\mu(x)}{k^{2-2p}}$$
$$\le \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n} \left(\sum_{k=2^M+1}^{n} \frac{c 2^{M(1-p)} M^{[1/2+p]}}{k^{2-p}} + \sum_{k=2^M+1}^{n} \frac{c}{k^{2-2p}} \right) \le c < \infty.$$

რაც ასრულებს თეორემა 1-ის დამტკიცებას.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. ვთქვათ $\varphi(n)$ არაკლებადი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{(|n_k|+1)(2-2p)}}{\phi\left(2^{|n_k|+1}\right)} = \infty.$$

ამ პირობებში არსებობს მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \ge 0\} \subset \{n_k : k \ge 0\}$, ისეთი, რომ $|\alpha_k| \ge 2$, ნებისმიერი $k \ge 0$ და

$$\sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)}{2^{|\alpha_\eta|(1-p)}} = 2^{1-p} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)}{2^{(|\alpha_\eta|+1)(1-p)}} < c < \infty.$$

განვიხილოთ მარტინგალი

$$f_n(x) = \sum_{\{k:|\alpha_k|<n\}} \lambda_k a_k,$$

სადაც

$$\lambda_k = \frac{\phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}$$

და

$$a_k(x) = 2^{|\alpha_k|(1/p-1)} \left(D_{2^{|\alpha_k|+1}}(x) - D_{2^{|\alpha_k|}}(x) \right).$$

ადვილი სანახავია, რომ მარტინგალი $f = (f_n, n \in N) \in H_p$. მართლაც, მას შემდეგ რაც

$$S_{2^n} a_k(x) = \begin{cases} a_k, & |\alpha_k| < n \\ 0, & |\alpha_k| \ge n \end{cases}$$

$$\sup pa_k(x)=I_{|\alpha_k|}, \qquad \int\limits_{I_{|\alpha_k|}} a_k d\mu = 0, \qquad \|a_k\|_\infty \le 2^{|\alpha_k|/p} = (\sup p)^{-1/p},$$

ვეისის თეორემა W1-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $f=(f_n, n\in N)\in H_p$. ადვილი სანახავია

(16) $$\hat{f}(i)=\begin{cases}\phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right), & if \quad j\in\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\} \quad k=0,1,2,...\\ 0, & if \quad j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}$. მივიღებთ

$$\sigma_n f=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2^{|\alpha_k|}} S_j f+\frac{1}{n}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{n} S_j f = III+IV.$$

ადვილი სანახავია

(17) $$S_i \quad f_m(x)=\begin{cases}0, & if \quad 0\le j\le 2^{|\alpha_0|},\\ \varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_0|+1}\right)\left(D_j-D_{2^{|\alpha_0|}}\right), & if \quad 2^{|\alpha_0|}<j\le 2^{|\alpha_0|+1},\end{cases}$$

ეხლა დავუშვათ, რომ $2^{|\alpha_s|}<n\le 2^{|\alpha_s|+1}$, სადაც $s=1,2,...,k.$ თუ გამოვიყენებთ (16)-ს მივიღებთ

(18) $$\begin{aligned} S_j f &= \sum_{v=1}^{2^{|\alpha_{s-1}|}-1}\hat{f}(v)w_v+\sum_{v=2^{|\alpha_s|}+1}^{j-1}\hat{f}(v)w_v\\ &=\sum_{\eta=0}^{s-1}\sum_{v=2^{|\alpha_\eta|}}^{2^{|\alpha_\eta|+1}-1}\hat{f}(v)w_v+\sum_{v=2^{|\alpha_s|}+1}^{j-1}\hat{f}(v)w_v\\ &=\sum_{\eta=0}^{s-1}\sum_{v=2^{|\alpha_\eta|}}^{2^{|\alpha_\eta|+1}-1}\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|}\right)w_v+\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_s|}\right)\sum_{v=2^{|\alpha_s|}+1}^{j-1}w_v\\ &=\sum_{\eta=0}^{s-1}\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right)+\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_s|}\right)\left(D_j-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right).\end{aligned}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_s|+1}<n\le 2^{|\alpha_{s+1}|}$, სადაც $s=1,2,...,k-1.$ (18)-ის ანალოგიურად ჩვენ მივიღებთ

(19) $$S_j f=\sum_{v=1}^{2^{|\alpha_1|+1}}\hat{f}(v)w_v=\sum_{\eta=0}^{s}\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right).$$

ვთქვათ $x\in I_2(e_0+e_1)$, მას შემდეგ რაც (იხილეთ (4) და (8))

$$D_{2^n}(x)=K_{2^n}(x)=0, \qquad n\ge 2,$$

მივიღებთ

(20) $$\begin{aligned} III &= \frac{1}{n}\sum_{\eta=0}^{k-1}\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\sum_{v=2^{|\alpha_\eta|}}^{2^{|\alpha_\eta|+1}-1}D_v\\ &=\frac{1}{n}\sum_{\eta=0}^{k-1}\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(2^{|\alpha_\eta|+1}K_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-2^{|\alpha_\eta|}K_{2^{|\alpha_\eta|}}\right)=0.\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (19)-ს IV -ში, როცა $s=k$ მივიღებთ

(21)
$$IV=\frac{n-2^{|\alpha_k|}}{n}\sum_{\eta=0}^{k-1}\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right)$$
$$+\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{n}\left(D_j-D_{2^{|\alpha_k|}}\right)=IV_1+IV_2.$$

(19)-ი ს გამოყენებით მივიღებთ

$$IV_1=0,\quad x\in I_2(e_0+e_1).$$

ვთქვათ $\alpha_k\in N_{0,2}$, $2^{|\alpha_k|+1}<n\le 2^{|\alpha_{k+1}|}$ და $x\in I_2(e_0+e_1)$. მას შემდეგ რაც $n-2^{|\alpha_k|}\in N_{0,2}$ და

$$D_{j+2^{|\alpha_k|}}=D_{2^{|\alpha_k|}}+w_{2^{|\alpha_k|}}D_j,\qquad j<2^{|\alpha_k|},$$

(7)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$|IV_2|=\left|\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\sum_{j=1}^{n-2^{|\alpha_k|}}\left(D_{j+2^{|\alpha_k|}}(x)-D_{2^{|\alpha_k|}}(x)\right)\right|$$
$$=\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\left|\sum_{j=1}^{n-2^{|\alpha_k|}}D_j(x)\right|$$
$$=\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\left|\left(n-2^{|\alpha_k|}\right)K_{n-2^{|\alpha_k|}}(x)\right|\ge\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}.$$

ვთქვათ $0<p<1/2$, $2^{|\alpha_k|+1}<n\le 2^{|\alpha_{k+1}|}$ და $n\in N_{0,2}$. (19)-(21) გაერთიანებით მივიღებთ

$$\|\sigma_n f\|_{L_{p,\infty}}^p\ge\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|+1}}\mu\left\{x\in I_2(e_0+e_1):|\sigma_n f|\ge\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|+1}}\right\}$$
$$\ge\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|+1}}\mu\{I_2(e_0+e_1)\}\ge\frac{\varphi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|+1}}.$$

საიდანაც

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_n f\|_{L_{p,\infty}}^p}{\varphi(n)}\ge\sum_{\left\{n\in N_{0,2}:2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}\right\}}\frac{\|\sigma_n f\|_{L_{p,\infty}}^p}{\varphi(n)}$$
$$\ge\frac{1}{\varphi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}\sum_{\left\{n\in N_{0,2}:2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}\right\}}\frac{1}{2^{p(|\alpha_k|+1)}}$$
$$\ge\frac{c_p 2^{(1-p)(|\alpha_k|+1)}}{\varphi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)2^{|\alpha_k|+1}}\to\infty,\qquad k\to\infty.$$

რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

თეორემა 3-ის დამტკიცება. ვთქვათ

(22)
$$f_m(x)=2^m\left(D_{2^{m+1}}(x)-D_{2^m}(x)\right)$$

ცხადია, რომ

(23)
$$\hat{f}_m(i)=\begin{cases}2^m, i=2^m,\ldots,2^{m+1}-1,\\ 0, sxvagan\end{cases}$$

(23)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

(24) $$S_i \quad f_m(x)=\begin{cases} 2^m\left(D_i(x)-D_{2^m}(x)\right), 2^m+1,\dots,2^{m+1}-1, \\ f_m(x), i\geq 2^{m+1}, \\ 0, sxvagan \end{cases}$$

(4) და (24)-ის გამოყენებით დავასკვნით

(25) $$\begin{aligned}\|f_m\|_{H_p} &= \left\|\sup_{m\in N} S_{2^n}(f_m)\right\|_p = \|f_m\|_p \\ &= 2^m\left\|D_{2^{m+1}}(x)-D_{2^m}(x)\right\|_p = 2^m\left\|D_{2^m}(x)\right\|_p \leq 1.\end{aligned}$$

ვთქვათ $0<n<2^m$. თუ გამოვიყენებთ (24)-ს მივიღებთ

(26) $$\begin{aligned}\left|\sigma_{n+2^m} f_m\right| &= \frac{1}{n+2^m}\left|\sum_{j=2^m+1}^{n+2^m} S_j(f_m)\right| = \frac{1}{n+2^m}\left|2^m\sum_{j=2^m+1}^{n+2^m}\left(D_j-D_{2^m}\right)\right| \\ &= \frac{1}{n+2^m}\left|2^m\sum_{j=1}^{n}\left(D_{j+2^m}-D_{2^m}\right)\right| = \frac{1}{n+2^m}\left|2^m\sum_{j=2^m+1}^{n+2^m} D_j\right| = \frac{2^m}{n+2^m}n\left|K_n\right|.\end{aligned}$$

ვთქვათ $n=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{m_i}2^k$, სადაც $0\leq l_1\leq m_1\leq l_2-2<l_2\leq m_2\leq\ldots\leq l_s-2<l_s\leq m_s$. თუ გამოვიყენებთ ლემა 2 და (26)-ს შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left|\sigma_{n+2^m} f_m\right| \geq \ 2^{2l_i},$$

სადაც $x\in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)$. საიდანაც მივიღებთ

$$\begin{aligned}\int_G\left|\sigma_{n+2^m} f_m(x)\right|d\mu(x) &\geq \sum_{i=0}^{s}\ \int_{I_{l_i+1}\left(\Delta_{l_i-1}+\Delta_{l_i}\right)}\left|\sigma_{n+2^m} f_m(x)\right|d\mu(x) \\ &\geq c\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{2^{l_i}}2^{l_i} \geq cs \geq cV(n).\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (6) მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\sup_{n\in N}\sup_{\|f\|_{H_p}\leq 1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left\|\sigma_k f\right\|_{1/2}^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}-1}\left\|\sigma_k f_m\right\|_{1/2}^{1/2} \geq \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}-1}V\left(k-2^m\right) \\ &\geq \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=1}^{2^m-1}V(k) \\ &\qquad \geq c\log m\to\infty, \quad \text{როცა } m\to\infty.\end{aligned}$$

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. I. Blahota, G. Gát, and U. Goginava, Maximal operators of Fejér means of double Vilenkin-Fourier series, Colloq. Math. 107 (2007), 287--296.
2. I. Blahota, G. Gát, and U. Goginava, Maximal operators of Fejér means of Vilenkin-Fourier series. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7 (2006), 1-7.
3. N.J. Fine, On the Walsh function, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 372-414.
4. N. J. Fujii, A maximal inequality for H_1 functions on the generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), lll-116.
5. G. Gát, Inverstigations of certain operators with respect to the Vilenkin sistem, Acta Math. Hung., 61 (1993), 131-149.
6. G. Gát, Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems. J. Approx. Theory 124 (2003), 25--43.
7. U. Goginava, Maximal operators of Fejér means of double Walsh-Fourier series. Acta Math. Hungar. 115 (2007), 333--340.
8. U. Goginava, On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series. J. Approx. Theory 115 (2002), 9-20.
9. U. Goginava, Maximal operators of Fejér-Walsh means. Acta Sci. Math. (Szeged) 74 (2008), 615--624.
10. U. Goginava, The martingale Hardy type inequality for Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional conjugate Walsh-Fourier series, Acta Math. Sinica, 27, (2011), 1949-1958.
11. B. Golubov, A. Efimov and V. Skvortsov, Walsh series and transformations, Dordrecht, Boston, London, 1991. Kluwer Acad. publ, 1991.
12. J. Pál and P. Simon, On a generalization of the comncept of derivate, Acta Math. Hung., 29 (1977), 155-164.
13. F.Schipp, W.R. Wade, P. Simon, J. Pál, Walsh series, An Introduction to Duadic Harmonic Analysis, Akademiai Kiadó, (Budapest-AdamHilger (Bristol-New-York)), 1990.
14. F.Schipp, Certain rearranngements of series in the Walsh series, Mat. Zametki, 18 (1975), 193-201.
15. P. Simon, Inverstigations wish respect to the Vilenkin sistem, Annales Univ. Sci. Budapest Eotv., Sect. Math., 28 (1985) 87-101.
16. P. Simon, A note on the of the Sunouchi operator with respect to Vilenkin systems, Annales Univ. Sci. Sect. Math. Budapest (2001).
17. P. Simon. Strong Convergence Theorem for Vilenkin-Fourier Series. J. Matპ Anal. and Appl., 245, (2000), pp. 52-68.
18. P. Simon. Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series, Acta Math. Hung., 49 (1-2) (1987), 425-431.
19. P. Simon, F. Weisz, Strong convergence theorem for two-parameter Vilenkin-Fourier series. Acta Math. Hungar. 86, (2000), 17-38.
20. B. Smith, A strong convergence theorem for $H_1(T)$, in Lecture Notes in Math., 995, Springer, Berlin, (1994), 169-173.
21. G. Tephnadze, Fejér means of Vilenkin-Fourier series, Stud. sci. math. Hung., 49, (2012) 79-90.
22. G. Tephnadze, On the maximal operator of Vilenkin-Fejér means, Turk. J. Math, 37, (2013), 308-318.
23. F. Weisz, Hardy spaces and Cesáro means of two-dimensional Fourier series, Bolyai Soc. math. Studies, (1996), 353-367.

24. F.Weisz, Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series. (English) Stud. Math. 117 (1996), 173-194.
25. F. Weisz, Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier Analysis, Springer, Berlin-Heideiberg-New York, 1994.
26. F. Weisz, Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy space, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.