r-მაქსიმალური სიმრავლეების $Q_{1,N}$-ხარისხების შესახებ

როლანდ ომანაძე

E-mail: roland.omanadze@tsu.ge

ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, მათემა–

ტიკის დეპარტამენტი. ჭავჭავაძის პრ.1, 0218 თბილისი, საქართველო

ტენენბაუმმა (იხ., [4], გვ.159) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეებზე განსაზღვრა Q-დაყვანადობის ცნება შედეგნაირად: A სიმრავლე Q -*დაყვანადია* B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $A \leq_Q B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი $x \epsilon \omega$ (სადაც ω აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს), $x \epsilon A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $A \leq_Q B$ f ფუნქციით. თუ $A \leq_Q B$ ისეთი f ფუნქციით, რომ ყოველი x, y– სთვის, $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$ და $\bigcup_{x \epsilon \omega} W_{f(x)}$ არის გამოთვლადი, მაშინ ვიტყვით, რომ A არის $Q_{1,N}$-*დაყვანადი* B– *ზე*, და ვწერთ $A \leq_{Q_{1,N}} B$ (*იხ.*, [2]).

რეკურსიულად გადათვლადი (რ.გ.) M სიმრავლე არის r -*მაქსიმალური,* თუ $\overline{M}$ არის უსასრულო და ყოველი გამოთვლადი R სიმრავლისათვის, $R \cap \overline{M}$ ან $\overline{R} \cap \overline{M}$ არის სასრული. თუ A არის არაგამოთვლადი რ.გ. სიმრავლე მაშინ A სიმრავლის არატრივიალური გახლეჩა არის არაგამოთვლად რ.გ. სიმრავლეთა ისეთი დიზიუნქციური წყვილი A_0, A_1, რომ $A= A_0 \cup A_1$.

A სიმრავლე არის ნახევრად *r-მაქსიმალური* (იხ. [2]), თუ არსებობს რაიმე r-მაქსიმალური სიმრავლე M და მისი ისეთი არატრივიალური გახლეჩა M_0, M_1, რომ $A = M_0$.

თეორემა 1. ვთქვათ M არის რაიმე r-მაქსიმალური სიმრავლე, A ნებისმიერი სიმრავლეა და $M \equiv_{Q_{1,N}} A$. მაშინ $M \leq_m A$.

მოცემული რ.გ. სიმრავლეებისათვის $A \subseteq B$, A არის B სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლე ($A \subset_m B$) (იხ., [3]) , თუ $B - A$ არის უსასრულო და ყოველი რ.გ. W სიმრავლისათვის გვაქვს: $\bar{B} \subseteq^* W \Rightarrow \bar{A} \subseteq^* W$.

თეორემა 2. ვთქვათ M არის რაიმე r-მაქსიმალური სიმრავლე, A არის M სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლე, B ნებისმიერი სიმრავლეა და $M - A \equiv_{Q_{1,N}} B$. მაშინ $M \leq_m B$.

თეორემა 3. თუ C, D არიან ნახევრად r-მაქსიმალური სიმრავლეები, მაშინ

$$C \equiv_{Q_{1,N}} D \Leftrightarrow C \equiv_1 D.$$

[1] V.K.Bulitko, On ways of characterizing complete sets, Math. USSR, Izv. vol 38 (1992), no.2.

[2] R.G.Downey and M.Stob, Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets: Orbits. Advances in Mathematics, vol.92 (1992).

[3] A.H.Lachlan, On the lattice of recursively enumerable sets, Trans. Amer. Math. Soc.,130, 1 (1968).

[4] H.Rogers, Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.