ტრიგონომეტრიული ჰიპერბოლური მატრიცა ფუნქციების რიცხვითი გამოთვლის ეფექტური ალგორითმი

ნანა დიხამინჯია[1], ჯემალ როგავა[1], მიხეილ წიკლაური[2]

[1]თსუ-ს, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი & ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, 2 უნივერსიტეტის ქუჩა, თბილისი, 0186, თბილისი

[2]ელექტრო-მაგნიტური თავსებადობის ლაბორატორია, მისურის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების უნივერსიტეტი, რომა, მისური 65401, აშშ

საკვანძო სიტყვები და ფრაზები: *ტრიგონომეტრიული ჰიპერბოლური მატრიცა-ფუნქცია; ორშრიანი სქემა; რეკურენტული დამოკიდებულება;*

წარმოდგენილ ნაშრომში შემოთავაზებულია ეფექტური ალგორითმი სინუს და კოსინუს ჰიპერბოლური ფუნქციების რიცხვითი გამოთვლისათვის. სინუს და კოსინუს ჰიპერბოლური ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{1}$$

აგებულია ორშრიანი რეკურენტული დამოკიდებულება (1) ჰიპერბოლური მატრიცა ფუნქციების გამოთვლისათვის. ალგორითმის ძირითადი იდეა მდგომარეობს შემდეგში: $\cosh(x_0 A)$ და $A^{-1}\sinh(x_0 A)$ ითვლება $x_0 = l/2^n$ მცირე მნიშვნელობისათვის და შემდეგ $\cosh(lA)$ და $A^{-1}\sinh(lA)$ მიიღება ცნობილი ტრიგონომეტრიული ფორმულების გამოყენებით:

$$\cosh(lA) = 2\cosh^2(Al/2) - I, \quad A^{-1}\sinh(lA) = (lA/2)^{-1}\sinh(lA/2)\cosh(lA/2), \tag{2}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} U(x) &= \cosh(xA) = I + \frac{x^2}{2!}A^2 + \frac{x^4}{4!}A^4 + \ldots, \qquad x \in [0,l], \\ V(x) &= (xA)^{-1}\sinh(xA) = I + \frac{x^2}{3!}A^2 + \frac{x^4}{5!}A^4 + \ldots, \qquad x \in [0,l]. \end{aligned} \tag{3}$$

ცხადია (2) -ის თანახმად, $U(x)$ და $V(x)$ აკმაყოფილებენ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$U(x_{k+1}) = 2U^2(x_k) - I, \quad V(x_{k+1}) = V(x_k)U(x_k), \tag{4}$$

სადაც $x_k = 2^k / 2^n l, \quad k = 0,1,\ldots,n$. (4)-ის რიცხვითი რეალიზაციისათვის საჭირო $U(x_0)$ და $V(x_0)$ საწყისი ვექტორების გამოთვლას ვახდენთ შემდგი ფორმულებით:

$$U_0 = P_0(x_0 A) = I + \frac{x_0^2}{2!}A^2 + \frac{x_0^4}{4!}A^4 + \ldots + \frac{x_0^{2p}}{(2p)!}A^{2p}, \tag{5}$$

$$V_0 = I + \frac{x_0^2}{3!}A^2 + \frac{x_0^4}{5!}A^4 + \ldots + \frac{x_0^{2p}}{(2p+1)!}A^{2p}, \tag{6}$$

შემდეგ, (5) და (6) შეიცვლება შემდეგი რეკურენტული ფორმულებით:

$$U_k = 2U^2{}_{k-1} - I, \quad V_k = V_{k-1}U_{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots,n., \tag{7}$$

შევნიშნოთ, რომ $\cosh(lA) \approx U_n$ და $A^{-1}\sinh(lA) \approx V_n$ -ის გამოსათვლელად მხოლოდ მატრიცების გამრვლებაა საჭირო. ნაჩვენებია (7) სქემის მდგრადობა, დამტკიცებულია კრებადობის თეორემა და შეფასებულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება.