ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ხათუნა მშვენიერაძე

II სემესტრის დოქტორანტი

სასემინარო ნაშრომი (სასწავლო კომპონენტი) თემაზე:

მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა ერთი სისტემის ავტომოდელური ამოხსნისა და მისი გამოყენების შესახებ

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ჯონდო შარიქაძე

ფიზ. მათ. მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ სრული პროფესორი

თბილისი 2014 წელი

სარჩევი

შესავალი

სითხეების უმრავლესობა და ასევე ყველა აირი წარმოადგენს ნიუტონისეულ სითხეს. თხელი სუსპენზიები, თიხიანი ხსნარები, ზეთოვანი საღებავები თავიანთი თვისებებით განსხვავდებიან ნიუტონისეული სითხეებისაგან. ასეთი არანიუტონისეული სითხეების სიბლანტე უკვე აღარ წარმოადგენს მხოლოდ ტემპერატურაზე და წნევაზე დამოკიდებულ სიდიდეს, არამედ ხდება ძვრის სიჩქარისა და სხვა ფაქტორების, დეფორმაციის, მოძრაობის და დროის ფუნქცია. არანიუტონისეული სითხეების დინებათა კანონზომიერების გამოკვლევა დიდ მნიშვნელობას იძენს მრეწველობასა და ტექნიკაში ახალი მასალების შექმნისა და ფართო გამოყენებისათვის, ასევე სხვადასხვა ბიოლოგიური გარემოს დინებათა შესწავლისას.

ნაშრომში შესწავლილია მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ერთი სისტემის ავტომოდელური ამონახსნის არსებობის პირობები, რომლებიც ედება ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებს.

მაგალითისათვის განხილულია ფოროვანი უსასრულო კედლის მოძრაობით გამოწვეული ბლანტი არაკუმშვადი გამტარი სითხის მოძრაობის ამოცანა.

§1. სასაზღვრო ფენი

სასაზღვრო ფენის თეორია აღწერს მექანიკური პროცესების მიმდინარეობას მყარი სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში. სასაზღვრო ფენის თეორიაში ინერციის კვადრატული წევრები მთლიანად არის შენარჩუნებული, ხოლო სიბლანტის წევრები მხოლოდ ნაწილობრივ არიან გათვალისწინებულნი.

პრაქტიკულად განსაკუთრებით საინტერესოა ისეთი მოძრაობები, რომლებშიც ინერციული ეფექტები სჭარბობენ ხახუნის ძალების გავლენას. როგორც ცნობილია, ამ ორი ძირითადი ძალის კლასთა ფარდობის ზომას რეინოლდსის რიცხვი წარმოადგენს. სწორედ ამიტომ განსახილველი შემთხვევა არის მოძრაობა რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობის დროს. ამ შემთხვევაში სხეულების გარსდენისას სითხის მთელი ნაკადი ორ არედ შეიძლება დაიყოს:

1. მცირე სისქის მქონე არე სხეულის ზედაპირის მახლობლობაში, რომელსაც სასაზღვრო ფენს უწოდებენ და რომელშიც სიბლანტის ძალების ზემოქმედება ისეთივე არსებითია, როგორც სხვა ძალებისა;
2. არე, რომელშიდაც უგულებელყოფილია სიბლანტე, გარე არედ იწოდება. ამ არეში სიჩქარის გრადიენტი ვერ აღწევს ისეთ დიდ მნიშვნელობებს, როგორც სასაზღვრო ფენში, და ამიტომ სიბლანტის გავლენა არ თამაშობს როლს. მაშასადამე, შეიძლება ჩაითვალოს რომ აქ დინება პოტენციალურია. გარე არეში სითხე შეიძლება იდეალურად ჩაითვალოს.

ასე, რომ საკითხი ეხება თითოეულ არეში სითხის მოძრაობების ცალ – ცალკე შესწავლას მოძრაობის გამარტივებული განტოლებების საშუალებით და შემდეგ მათ „შეკვრას" როგორც ერთი მთლიანისას. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია სითხის ნაკადის რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობა, იცვლება სასაზღვრო ფენისა და გარე ნაკადის სისქე. რაც უფრო დიდია რეინოლდსის რიცხვი, მით თხელია სასაზღვრო ფენის არე და შესაბამისად დიდია გარე ნაკადის განფენილობა და პირიქით, სიბლანტის როლის გაზრდა იწვევს სასაზღვრო ფენის გასქელებას და გარე არის შემცირებას.

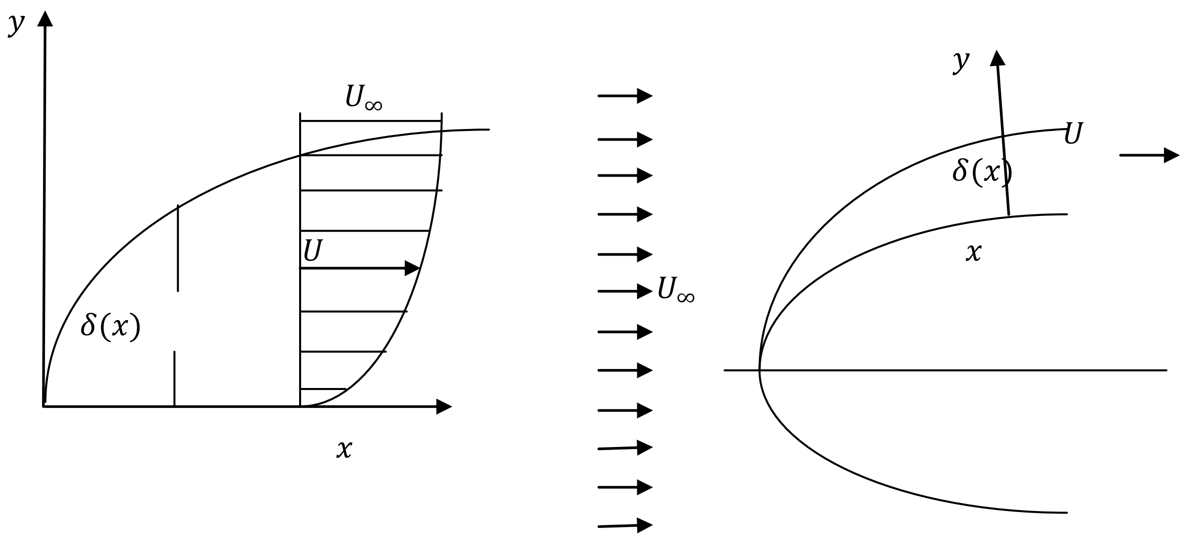
სასაზღვრო ფენაში სითხის დამუხრუჭების გამო დენის მილები ფართოვდება, დენის წირები წანაცვლდებიან და გარე ნაკადს ავიწროვებენ.

როდესაც სითხე გარს ედინება მასში ჩაძირულ უძრავ სხეულს, ხდება სითხის ნულოვანი სიჩქარიდან, რომელიც სითხის სხეულზე მიკვრით არის განპირობებული, გადასვლა გარე ნაკადის სიჩქარეში. ეს გადასვლა წარმოებს სხეულის ზედაპირის მახლობელ არეში – სასზვრო ფენაში. რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის სასაზღვრო ფენის სისქე ძალზე მცირეა ნაკადის გასწვრივ ზომებთან შედარებით.

განასხვავებენ ლამინარულ და ტურბულენტურ სასაზღვრო ფენს, იმის მიხედვით, თუ როგორია მასში დინების ლამინარული თუ ტურბულენტური რეჟიმი.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ვახდენთ სასაზღვრო ფენის სისქის

შეფასებას, იმ შემთხვევაში, როდესაც სხეულის გარსდენა უწყვეტია. საგულისხმოა, რომ სასაზღვრო ფენის სისქის ცნება რამდენადმე პირობითია, რადგან სასაზღვრო ფენში სითხის სიჩქარე ასიმპტოტურად უახლოვდება გარე ნაკადის სიჩქარეს. იმისათვის რომ ამ ცნებას მივცეთ განმარტება, სასაზღვრო ფენის სისქე ვუწოდოთ გარსმოდენადი ზედაპირიდან ისეთ დაშორებას (მანძილს), რომელშიც სითხის სიჩქარე განსხვავდება გარე ნაკადის სიჩქარისაგან რაიმე მოცემული სიდიდით, მაგალითად 1% – ით (ნახ. 2).



როცა $U \simeq 0{,}99 U_\infty$, $y = \delta$

ნახ. 2

§4. მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურიგანტოლებათა ერთი სისტემის ავტომოდელური ამოხსნისა და მისი გამოყენების შესახებ

მოცემულია მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მხოლოდ დროზე დამოკიდებული კოეფიციენტებით:

$$
\begin{aligned}
&a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_1(t)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(t)u+a_3(t)\frac{\partial v}{\partial x}+a_4(t)v-\frac{\partial u}{\partial t}=0\,,\\
&a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a_5(t)\frac{\partial v}{\partial x}+a_6(t)v+a_7(t)\frac{\partial u}{\partial x}+a_8(t)u-\frac{\partial v}{\partial t}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

და სასაზღვრო პირობები:

$$
\begin{aligned}
&u(x,0)=0,\quad u(0,t)=u_w(t),\quad u(\infty,t)=0,\quad u_w(0)=0,\\
&v(x,0)=0,\quad v(0,t)=v_w(t),\quad v(\infty,t)=0,\quad v_w(0)=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: დავადგინოთ როგორი $a_i(t)$, $u_w(t)$ და $v_w(t)$ $(i=1,2,\dots,8)$ ფუნქციების შემთხვევაში არსებობს $(1),(2)$ ამოცანის ავტომო–დელური ამონახსნი და ვიპოვოთ ისინი; კოეფიციენტი $a=\mathrm{const}$.

სისტემა (1)-ის მეორე განტოლება გავამრავლოთ α-ზე და მივუმატოთ პირველ განტოლებას, მივიღებთ:

$$
a\frac{\partial^2(u+\alpha v)}{\partial x^2}+a_1(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{a_5}{a_1}\alpha v\right)+a_2(t)\left(u+\frac{a_6}{a_2}\alpha v\right)
$$

$$
\alpha a_7(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{a_3}{\alpha a_7}v\right)+\alpha a_8(t)\left(u+\frac{a_4}{\alpha a_8}v\right)-\frac{\partial}{\partial t}(u+\alpha v)=0. \tag{3}
$$

დავუშვათ, რომ

$$
a_5(t)=a_1(t),\quad a_6(t)=a_2(t),\quad a_3(t)=a_7(t),\quad a_4(t)=a_8(t),\quad \alpha^2=1.
$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u(x,t)+v(x,t)=u_+(x,t),$$
$$u(x,t)-v(x,t)=u_-(x,t). \tag{4}$$

მაშინ (3)-დან და (2)-დან მივიღებთ:

$$a\frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2}+(a_1+a_3)\frac{\partial u_+}{\partial x}+(a_2+a_4)u_+-\frac{\partial u_+}{\partial t}=0, \tag{5}$$

$$u_+(x,0)=0, \qquad u_+(0,t)=u_w(t)+u_w(t)=u_{+w}, \qquad u_+(\infty,t)=0,$$

$$a\frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2}+(a_1-a_3)\frac{\partial u_-}{\partial x}+(a_2-a_4)u_--\frac{\partial u_-}{\partial t}=0, \tag{6}$$

$$u_-(x,0)=0, \qquad u_-(0,t)=u_w(t)-u_w(t)=u_{-w}, \qquad u_-(\infty,t)=0.$$

ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$u_+(x,t)=u_{+w}(t)f(\eta), \qquad u_-(x,t)=u_{-w}(t)\varphi(\eta), \tag{7}$$

სადაც $\eta=\frac{x}{2\sqrt{at}}$ ავტომოდელური ცვლადია.

(7)-ის ჩასმით (5)-ში და (6)-ში მივიღებთ:

$$f'' + 2\left[\eta+(a_1+a_3)\sqrt{\frac{t}{a}}\right]f' - 4t\left[\frac{u_{+w}'}{u_{+w}}-(a_2+a_4)\right]f=0, \tag{8}$$

$$\varphi'' + 2\left[\eta+(a_1-a_3)\sqrt{\frac{t}{a}}\right]\varphi' - 4t\left[\frac{u_{-w}'}{u_{-w}}-(a_2-a_4)\right]\varphi=0, \tag{9}$$

$$f(0)=1, \quad f(\infty)=0, \quad \varphi(0)=1, \quad \varphi(\infty)=0. \tag{10}$$

იმისათვის, რომ (8) და (9) განტოლებებს გააჩნდეთ ავტომოდელური ამონახსნი, აუცილებელია ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$[a_1(t)+a_3(t)]\sqrt{\frac{t}{a}}=\beta=\text{const}, \qquad [a_1(t)-a_3(t)]\sqrt{\frac{t}{a}}=\delta=\text{const},$$

$$t\left[\frac{u'_{+w}}{u_{+w}}-(a_2+a_4)\right]=n, \qquad t\left[\frac{u'_{-w}}{u_{-w}}-(a_2-a_4)\right]=m, \quad m,n\in N. \tag{11}$$

სადაც

$$f'(\eta)=\frac{df}{d\eta}, \quad u'_{\pm w}=\frac{du_{\pm w}}{dt}, \quad \varphi'(\eta)=\frac{d\varphi}{d\eta}.$$

(11) ტოლობებიდან მივიღებთ ავტომოდელობის პირობებს:

$$a_1(t)=\frac{\beta+\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}, \quad a_3(t)=\frac{\beta-\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} u_{+w}(t)=At^n\exp\left\{-\int_0^{t}[a_2(\tau)+a_4(\tau)]\,d\tau\right\}, \\ u_{-w}(t)=Bt^m\exp\left\{-\int_0^{t}[a_2(\tau)-a_4(\tau)]\,d\tau\right\}. \end{gathered} \tag{13}$$

მაშინ (8) და (9) განტოლებები მოგვცემენ:

$$f''+2(\eta+\beta)f'-4nf=0, \qquad f(0)=1, \quad f(\infty)=0, \tag{14}$$

$$\varphi''+2(\eta+\delta)f'-4mf=0, \qquad \varphi(0)=1, \quad \varphi(\infty)=0. \tag{15}$$

(14) და (15) ამოცანების ამონახსნები გამოისახება ალბათობის ჯერადი ინტეგრალების საშუალებით:

$$f(\eta)=\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta}, \quad \varphi(\eta)=\frac{i^{2m}\operatorname{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2m}\operatorname{erfc}\delta}, \tag{16}$$

სადაც

$$i^n\operatorname{erfc} z=\int_z^{\infty} i^{n-1}\operatorname{erfc}\zeta d\zeta .$$

პირველსაწყისი ამოცანის ამონახსნები იქნებიან:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[u_w(t)(f+\varphi)+v_w(t)(f-\varphi)], \tag{17}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[u_w(t)(f-\varphi) + v_w(t)(f+\varphi)], \tag{18}$$

მიღებული შედეგების გამოყენებისათვის განვიხილოთ ნახევრადუსასრულო არეში გამტარი სითხის მოძრაობა, რომელიც გამოწვეულია ბრტყელი ფოროვანი კედლის თავის სიბრტყეში $u_w(t)$ სიჩქარით გადაადგილებით. დავუშვათ კედლის მართობულად მოდებულია გარე მაგნიტური ველი $B_0(t)$. სითხეში ინდუცირდება მაგნიტური ველი $b(x,t)$.

მაშინ სისტემას, რომელიც განსაზღვრავს სასაზღვრო ფენის მახლობლობაში სიჩქარეს და ინდუცირებულ მაგნიტურ ველს, ექნება სახე:

$$\begin{gathered} \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_0(t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{B_0(t)}{\rho\mu_0}\frac{\partial b}{\partial x} = 0\,, \\ \nu_m\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + v_0(t)\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{B_0(t)}{\rho\mu_0}\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \end{gathered} \tag{19}$$

აქ $v_0(t)$ არის კედელში სითხის გაჟონვის სიჩქარე, ρ – სითხის სიმკვრივე, μ_0– სითხის მაგნიტური შეღწევადობა, ხოლო ν_m – მაგნიტური სიბლანტის კოეფიციენტი. კედელს უჭირავს oyz -არე, გარე მაგნიტური ველი პერპენდიკულარულია კედლისა და აქვს x ღერძის მიმართულება.

უცნობი $u(x,t)$ და $b(x,t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{gathered} u(x,0) = u_w(0) = 0, \quad u(0,t) = u_w(t), \;\; u(\infty,t) = 0, \\ b(x,o) = 0, \quad b(0,t) = 0, \;\; b(\infty,t) = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

თუ ჩავთვლით, რომ $\nu = \nu_m$ და შევადარებთ (19) და (1) სისტემებს, მივიღებთ:

$$u(x,t) = u(x,t), \qquad v(x,t) = \frac{b(x,t)}{\sqrt{\rho\mu_0}}\,,$$

$$a = \nu = \nu_m\,, \qquad a_1(t) = v_0(t), \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{B_0(t)}{\sqrt{\rho\mu_0}}\,, \quad a_4 = 0\,, \quad u_w = u_w\,,$$

$$a_5 = v_0\,, \quad a_6 = 0\,, \quad a_7 = \frac{B_0(t)}{\sqrt{\rho\mu_0}}\,, \quad a_8 = 0\,, \quad v_{w=0}\,, \quad n = m.$$

(19),(20) ამოცანების ამოხსნა ზემოაღნიშნული ამოცანის ანალოგიურია, ამასთან:

$$u(x,t) = \frac{u_w(t)}{2}[f(\eta) + \varphi(\eta)]\,,$$

$$b(x,t) = \frac{u_w(t)}{2}[f(\eta) - \varphi(\eta)]\sqrt{\rho\mu_0}\,,$$

სადაც

$$f(\eta) = \frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta}\,, \qquad \varphi(\eta) = \frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}\,.$$

$$u_w(t) = At^n\,.$$

ამგვარად, სითხის სიჩქარე და ინდუცირებული მაგნიტური ველი ეფექტურად გამოისახება ალბათობის ჯერადი ინტეგრალებით:

$$u(x,t) = \frac{At^n}{2}\left[\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta} + \frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}\right],$$

$$b(x,t) = \frac{At^n}{2}\sqrt{\rho\mu_0}\left[\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta} - \frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}\right].$$

ამასთან კედელში სითხის გაჟონვის სიჩქარე და მოდებული გარე მაგნიტური ველი უნდა აკმაყოფილებდნენ ავტომოდელურობის პირობებს:

$$v_0(t) = a_1(t) = \frac{\beta+\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}\,.$$

$$\frac{B_0(t)}{\sqrt{\rho\mu_0}} = a_3(t) = \frac{\beta-\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}\,.$$

თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადებს, მაშინ სითხის დინების სიჩქარისათვის და ინდუცირებული მაგნიტური ველისათვის გვექნება:

$$u(x,t) = \frac{At^n}{2}\left[\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\beta\right)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta} + \frac{i^{2n}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\delta\right)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}\right],$$

$$b(x,t)=\frac{At^n}{2}\sqrt{\rho\mu_0}\left[\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\beta\right)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta}-\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\delta\right)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}\right].$$

ფოროვან კედელზე ზედაპირულ ხახუნს აქვს სახე:

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\frac{At^n}{2}\mu\left[\frac{i^{2n-1}\operatorname{erfc}\beta}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta}+\frac{i^{2n-1}\operatorname{erfc}\delta}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}\right]\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}.$$

თუ კედელი მყისიერად იწყებს გადაადგილებას მუდმივი u_0 სიჩქარით, მაშინ $A=u_0$, $n=0$ და ზემოთ მოყვანილი ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\beta\right)}{\operatorname{erfc}\beta}+\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\delta\right)}{\operatorname{erfc}\delta}\right],$$

$$b(x,t)=\frac{u_0}{2}\sqrt{\rho\mu_0}\left[\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\beta\right)}{\operatorname{erfc}\beta}-\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\delta\right)}{\operatorname{erfc}\delta}\right],$$

$$\tau=-\frac{u_0\rho}{4\sqrt{t}}\left[\frac{i^{-1}\operatorname{erfc}\beta}{i^{0}\operatorname{erfc}\beta}+\frac{i^{-1}\operatorname{erfc}\delta}{i^{0}\operatorname{erfc}\delta}\right]=-\frac{u_0\rho}{4\sqrt{\pi t}}\left[\frac{e^{-\beta^2}}{\operatorname{erfc}\beta}+\frac{e^{-\delta^2}}{\operatorname{erfc}\delta}\right],$$

სადაც

$$\beta=\sqrt{\frac{t}{\nu}}\left(v_0+\frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}\right)=\text{const}\,,\qquad \delta=\sqrt{\frac{t}{\nu}}\left(v_0-\frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}\right)=\text{const}\,,$$

$$i^0\operatorname{erfc}z=\operatorname{erfc}z\,,\qquad i^{-1}\operatorname{erfc}z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\,.$$

თუ გვაქვს ჩვეულებრივი არაგამტარი სითხე, რომელიც მოძრაობაში მოდის მყისიერად სიჩქარით $u_0=\text{const}$ და გვაქვს არაფოროვანი კედელი, მივიღებთ სტოქსის კლასიკური ამოცანის ამონახსნს [2].

დასკვნა

მიღებულია მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ერთი სისტემის ავტომოდელური ამონახსნის არსებობის პირობები, რომლებიც ედება ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებს.

მაგალითისათვის განხილულია ფოროვანი უსასრულო კედლის მოძრაობით გამოწვეული ბლანტი არაკუმშვადი გამტარი სითხის მოძრაობის ამოცანა. ავტომოდელობის მოთხოვნა გარკვეულ შეზღუდვებს ადებს, როგორც კედლის გადაადგილების სიჩქარეს, ასევე გაჟონვის სიჩქარესა და გარედან მოდებულ მაგნიტურ ველს.

მიღებულია გამოსახულება ფოროვან კედელზე ზედაპირულ ხახუნის ძალისათვის.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. А. В. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., Наука, 1970.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя, М., Наука, 1974.